第27卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0085-07

双参数Rayleigh分布环境因子的经验Bayes估计及应用*

胡俊梅， 师义民， 高 妮， 覃晓琼

(西北工业大学应用数学系，西安 710072)

摘　要: 本文针对Rayleigh分布位置参数已知的情形，给出了Rayleigh分布环境因子的极大似然估计和经验Bayes估计，并将环境因子的估计结果应用于Rayleigh部件的可靠性评估，给出了该部件可靠度函数与失效率的估计。最后的随机模拟例子表明，经验Bayes估计优于极大似然估计，并且在考虑环境因子的情形下，Rayleigh部件可靠性指标的估计优于未考虑环境因子时的估计。

关键词: Rayleigh分布；环境因子；经验Bayes估计；可靠性评估

分类号: AMS(2000) 60G17　　**中图分类号**: O213.2　　**文献标识码**: A

1　引言

在可靠性寿命试验中，Rayleigh分布由于其良好的单调失效率性质，受到了许多科技工作者的极大关注，它被广泛地应用到医学、通讯工程、机械设计和航空航天等领域中[1]。双参数Rayleigh分布的分布函数和概率密度函数分别为

$$F(x;\mu,\sigma)=1-\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1}$$

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{x-\mu}{\sigma^2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2}$$

式中$x\geq\mu\geq 0$, μ为位置参数；$\sigma>0$为尺度参数。

已有一些文献对Rayleigh分布做了讨论。文献[1,2]讨论了单参数Rayleigh分布的参数估计问题，文献[3]讨论了双边定数截尾情形下单参数Rayleigh分布的Bayes估计和预测问题，文献[4]讨论了双参数Rayleigh分布参数的条件置信限，文献[5,6]分别讨论了Rayleigh梁和Rayleigh商。然而，关于Rayleigh分布环境因子的讨论尚未见到。在工程实际中，环境因子作为一种折合因子，可以扩大样本量，提高可靠性评估水平。为此，本文讨论双参数Rayleigh分布环境因子的估计及在可靠性评估中的应用。

2　Rayleigh分布环境因子的定义

关于环境因子的讨论建立在以下假设基础上[7]。

假定A　在不同环境下产品的寿命分布属于同一Rayleigh分布，只是在分布参数上存在差异。即环境I和环境II下产品的寿命分布分别为

$$F(x;\mu_i,\sigma_i)=1-\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2{\sigma_i}^2}},\quad i=1,2.$$

收稿日期: 2008-05-12.　**作者简介**: 胡俊梅(1983年7月生)，女，硕士. 研究方向：可靠性理论及应用、应用概率统计.

***基金项目**: 国家自然科学基金(70471057).

假定B　在不同环境下产品的失效机理不变，反映在Rayleigh分布中，位置参数不变。即

$$\mu_1=\mu_2=\mu.$$

假定C　产品的残存寿命仅依赖于已积累的失效和当前的环境应力，而与累计方式无关，即

$$F_1(x_1;\mu,\sigma_1)=F_2(x_2;\mu,\sigma_2)\Longleftrightarrow(x_1-\mu)^2/2{\sigma_1}^2=(x_2-\mu)^2/2{\sigma_2}^2.$$

基于以上三个假定，可以导出Rayleigh分布的环境因子为

$$k=\sigma_2/\sigma_1. \tag{3}$$

下面基于位置参数μ已知的情形进行讨论。

3　环境因子k的极大似然估计

μ已知时，讨论无替换定数截尾模型下环境因子k的估计。

设$x_{(i1)}\le x_{(i2)}\le\cdots\le x_{(im_i)}$为来自Rayleigh分布容量为$n_i$的随机样本中前$m_i$个最小观察值(为方便起见，可将$x_{(ij)}$的下标数字省略括号，下文的$x_{ij}$表示第$j$个最小观察值)。令$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im})$，由文[8]知，基于样本$x_i$的似然函数为

$$L_i(x_i\mid\sigma_i)=\frac{n_i!}{(n_i-m_i)!}\Big[\prod_{j=1}^{m_i}f(x_{ij};\mu,\sigma_i)\Big]\bar{F}^{n_i-m_i}(x_{im_i};\mu,\sigma_i). \tag{4}$$

将(1), (2)式代入(4)式，可得

$$L_i(x_i\mid\sigma_i)=A_i\mathrm{e}^{-Q_i/2{\sigma_i}^2}/{\sigma_i}^{2m_i}. \tag{5}$$

其中

$$A_i=\frac{n_i!\prod_{j=1}^{m_i}(x_{ij}-\mu)}{(n_i-m_i)!},\quad Q_i=\sum_{j=1}^{m_i}(x_{ij}-\mu)^2+(n_i-m_i)(x_{im_i}-\mu)^2,\quad i=1,2.$$

则在环境I和环境II下试验结果的联合似然函数为$L=L_1L_2$。

$$L(\sigma_1,\sigma_2)=\prod_{i=1}^{2}A_i\mathrm{e}^{-Q_i/2{\sigma_i}^2}/{\sigma_i}^{2m_i}. \tag{6}$$

联合对数似然函数为

$$\ln L(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{i=1}^{2}\ln A_i-\sum_{i=1}^{2}2m_i\ln\sigma_i-\sum_{i=1}^{2}Q_i/2\sigma_i^2,$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma_1}=-\frac{2m_1}{\sigma_1}+\frac{Q_1}{\sigma_1^3}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma_2}=-\frac{2m_2}{\sigma_2}+\frac{Q_2}{\sigma_2^3}, \tag{8}$$

令

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_1}=0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_2}=0,$$

从 (7), (8) 式解出 σ_1，σ_2 的极大似然估计 (记为 $\hat{\sigma}_{1ML}$，$\hat{\sigma}_{2ML}$) 分别为

$$\hat{\sigma}_{1ML}=(Q_1/2m_1)^{1/2}, \quad \hat{\sigma}_{2ML}=(Q_2/2m_2)^{1/2}.$$

由此得 k 的极大似然估计 (记为 $\hat{k}_{ML}$) 为

$$\hat{k}_{ML}=\hat{\sigma}_{2ML}/\hat{\sigma}_{1ML}=(Q_2 m_1/Q_1 m_2)^{1/2}. \tag{9}$$

4　μ 已知时，环境因子 k 的经验 Bayes (EB) 估计

由文献 [9]，可取 σ_i 的先验密度为

$$\pi(\sigma_i)=b_i\sigma_i^{-3}\mathrm{e}^{-b_i/2\sigma_i^2}, \quad i=1,2, \tag{10}$$

其中 $b_i>0$ 为超参数。由 (5), (10) 式得 σ_i 的后验密度为

$$\pi(\sigma_i \mid x_i)=\frac{(Q_i+b_i)^{m_i+1}}{2^{m_i}\Gamma(m_i+1)}\sigma_i^{-2m_i-3}\mathrm{e}^{-\frac{Q_i+b_i}{2\sigma_i^2}}.$$

由 $k=\sigma_2/\sigma_1$ 得 k 的后验密度为

$$f(k)=\int_0^{+\infty}\sigma_1\pi_2(k\sigma_1)\pi_1(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma_1=Ck^{2m_1+1}\big[b_2+Q_2+k^2(b_1+Q_1)\big]^{-(m_1+m_2+2)}, \tag{11}$$

其中

$$C=2(Q_1+b_1)^{m_1+1}(Q_2+b_2)^{m_2+1}/B(m_2+1,m_1+1).$$

$B(x,y)$ 为 Beta 函数。

在平方损失下，k 的 Bayes 估计 $\hat{k}_B$ 为

$$\begin{aligned}\hat{k}_B &= \int_0^{+\infty}kf(k)\mathrm{d}k\\ &= C\int_0^{+\infty}k^{2m_1+2}\big[b_2+Q_2+k^2(b_1+Q_1)\big]^{-(m_1+m_2+2)}\mathrm{d}k.\end{aligned} \tag{12}$$

上式不能求出精确解，可用数值积分求出。

下面用极大似然方法估计超参数 b_i，$i=1,2$

$$f(x_i)=\int_0^{+\infty}f(x_i;\sigma_i)\pi(\sigma_i)\mathrm{d}\sigma_i=\frac{2b_i(x_i-\mu)}{[(x_i-\mu)^2+b_i]^2}, \tag{13}$$

$$1-F(x_i)=\int_{x_i}^{+\infty}f(x_i)\mathrm{d}x_i=\frac{b_i}{(x_i-\mu)^2+b_i}. \tag{14}$$

似然函数 (4) 式变为

$$L_i(x_i \mid b_i)=\frac{n_i!}{(n_i-m_i)!}\Big[\prod_{j=1}^{m_i}f(x_{ij};b_i)\Big]\bar{F}^{n_i-m_i}(x_{im_i};b). \tag{15}$$

将(13), (14)式代入(15)式得

$$L_i(x_i \mid b_i) = D_i \prod_{j=1}^{m_i} \frac{b_i}{[(x_{ij}-\mu)^2+b_i]^2} \left[\frac{b_i}{(x_{im_i}-\mu)^2+b_i}\right]^{(n_i-m_i)},$$

其中 $D_i = [(n_i-m_i)!]^{-1} 2^{m_i} n_i! \prod_{j=1}^{m_i}(x_{ij}-\mu)$。

$$\ln L_i(x_i \mid b_i) = \ln D_i + m_i \ln b_i - 2\sum_{j=1}^{m_i} \ln\left[(x_{ij}-\mu)^2+b_i\right] + (n_i-m_i)\ln \frac{b_i}{(x_{im_i}-\mu)^2+b_i}.$$

由

$$\frac{\partial \ln L_i(x_i|b_i)}{\partial b_i} = \frac{m_i}{b_i} - \sum_{j=1}^{m_i} \frac{2}{(x_{ij}-\mu)^2+b_i} + \frac{n_i-m_i}{b_i} - \frac{n_i-m_i}{(x_{im_i}-\mu)^2+b_i} = 0,$$

得

$$\frac{n_i}{b_i} = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{2}{(x_{ij}-\mu)^2+b_i} + \frac{n_i-m_i}{(x_{im_i}-\mu)^2+b_i}.$$

令

$$h_1(b_i) = \frac{n_i}{b_i}, \quad h_2(b_i) = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{2}{(x_{ij}-\mu)^2+b_i} + \frac{n_i-m_i}{(x_{im_i}-\mu)^2+b_i},$$

则有

$$h_1(b_i) > 0, \quad h_1{\prime}(b_i) = -\frac{n_i}{b_i^2} < 0, \quad h_1{\prime\prime}(b_i) = \frac{2n_i}{b_i^3} > 0.$$

故 $h_1(b_i)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格单调递减凹函数

$$h_2(b_i) > 0, \quad h_2{\prime}(b_i) = -\sum_{j=1}^{m_i} \frac{2}{[(x_{ij}-\mu)^2+b_i]^2} - \frac{n_i-m_i}{[(x_{im_i}-\mu)^2+b_i]^2} < 0,$$

$$h_2{\prime\prime}(b_i) = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{4}{[(x_{ij}-\mu)^2+b_i]^3} + \frac{2(n_i-m_i)}{[(x_{im_i}-\mu)^2+b_i]^3} > 0.$$

故 $h_2(b_i)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为严格单调递减凹函数。又

$$\lim_{b\to\infty} \frac{h_1(b_i)}{h_2(b_i)} = \frac{n_i}{n_i+m_i} < 1,$$

故方程

$$\frac{n_i}{b_i} = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{2}{(x_{ij}-\mu)^2+b_i} + \frac{n_i-m_i}{(x_{im_i}-\mu)^2+b_i}$$

具有唯一解，且迭代公式为

$$b_i^{(p+1)} = \frac{n_i}{\sum\limits_{j=1}^{m_i} \frac{2}{(x_{ij}-\mu)^2+b_i^{(p)}} + \frac{n_i-m_i}{(x_{im_i}-\mu)^2+b_i^{(p)}}}, \quad p = 1,2,\cdots, \tag{16}$$

记(16)式的最终迭代值为 $\hat{b}_i$，将 $\hat{b}_i$ 代入(12)式即可求出 k 的EB估计 $\hat{k}_{EB}$。

5　随机模拟

考虑应用环境因子将较良好环境下的试验信息折合到较严酷环境下，则环境2下的第 j 个单元的信息转化为环境1的信息是 x_{2j}/k，再根据定数截尾的特点将这 m_1+m_2 个单元信息进行排序得到 $x_1<x_2<\cdots<x_m$，$m=m_1+m_2$。

服从 Rayleigh 分布的部件的可靠度函数和失效率分别为

$$R(x)=\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad r(x)=\frac{x-\mu}{\sigma^2}. \tag{17}$$

截尾数据下 Rayleigh 分布参数的极大似然估计为

$$\hat{\mu}_{ML}=x_1,\quad \hat{\sigma}_{ML}=\left(\frac{\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_1)^2+(n-m)(x_m-x_1)^2}{2m}\right)^{1/2},\quad n=n_1+n_2. \tag{18}$$

将 $\hat{\mu}_{ML}$, $\hat{\sigma}_{ML}$ 代入(17)式可得到考虑环境因子的可靠度和失效率估计。

以上已经得到了 Rayleigh 分布环境因子的极大似然估计和 EB 估计，现用 Monte-Carlo 方法进行模拟比较。具体步骤如下。

1)　产生 n_i 个服从 $U(0,1)$ 分布相互独立的随机样本 $Y_1, Y_2,\cdots,Y_{n_i}$，$i=1,2$;

2)　给定 $\mu=10$, $\sigma_1=4$, $\sigma_2=8$，令

$$x_{ij}=\left[-2\sigma_i^2 ln(1-Y_j)\right]^{1/2}+\mu,\quad j=1,2,\cdots,n_i,$$

则 $x_{i1}, x_{i2},\cdots,x_{in_i}$ 是服从 Rayleigh 分布 $F(x_i;\sigma_i)$ 的 n_i 个样本;

3)　预先给定截尾数据 m_i，产生样本 $x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im_i})$，由(9)式即可求出 $\hat{k}_{ML}$;

4)　利用(16)式求出 $\hat{b}_i$，将 $\hat{b}_i$ 代入(12)式即可求出 $\hat{k}_{EB}$，由(17), (18)式得到在严酷环境下考虑环境因子的 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$, $\hat{R}$, $\hat{r}$ 和不考虑环境因子的 $\bar{\mu}$, $\bar{\sigma}$, $\bar{R}$, $\bar{r}$。以上步骤随机模拟1000次，计算出不同样本 n_i 和截尾 m_i 下，极大似然估计和EB估计的均值和均方误差(MSE)。环境因子的真值 $k=2$。模拟结果列于表1、表2、表3中。

表1:　k 的 MLE 估计和 EB 估计的均值和均方误差

(n_1,n_2)	(m_1,m_2)	$\hat{k}_{ML}$	$\hat{k}_{EB}$	MSE($\hat{k}_{ML}$)	MSE($\hat{k}_{EB}$)
(10,10)	(7,7)	2.2146	2.0235	0.5329	0.0148
(15,12)	(11,10)	2.1248	2.0075	0.4636	0.0048
(20,18)	(16,13)	2.1756	1.9904	0.4075	$5.5876e^{-4}$
(30,25)	(20,15)	1.9507	1.9937	0.2971	$9.4102e^{-4}$
(35,30)	(28,25)	1.9915	2.1020	0.1173	0.0095

表 2: 严酷环境下 μ, σ_1 估计的均值和均方误差

(n_1,n_2)	(m_1,m_2)	$\bar{\mu}$(MSE)	$\hat{\mu}$(MSE)	$\bar{\sigma}_1$(MSE)	$\hat{\sigma}_1$(MSE)
(10,10)	(7,7)	12.1251(1.5762)	11.0716(0.7489)	2.7136(1.3756)	3.3561(0.7325)
(15,12)	(11,10)	13.1014(1.7492)	10.5847(0.6543)	2.7531(1.4869)	3.3174(0.6500)
(20,18)	(16,13)	13.0910(2.3549)	10.1602(0.1817)	2.7494(1.5593)	3.5800(0.4213)
(30,25)	(20,15)	11.0955(1.0082)	11.0544(0.8629)	3.0054(1.0052)	3.4250(0.2105)
(35,30)	(28,25)	11.0915(0.9811)	10.3256(0.3858)	2.9851(1.3247)	3.6877(0.6692)

表 3: 严酷环境下 R, r 估计的均值和均方误差 ($x = 15$, $R(15) = 0.4578$, $r(15) = 0.3125$)

(n_1,n_2)	(m_1,m_2)	$\bar{R}$(MSE)	$\hat{R}$(MSE)	$\bar{r}$(MSE)	$\hat{r}$(MSE)
(10,10)	(7,7)	0.6259(0.2682)	0.3914(0.0067)	0.6254(0.3429)	0.0030(0.0526)
(15,12)	(11,10)	0.6524(0.4253)	0.5443(0.0172)	0.5253(0.2285)	0.4000(0.0127)
(20,18)	(16,13)	0.7251(0.5387)	0.5524(0.0118)	0.4987(0.1900)	0.2580(0.1155)
(30,25)	(20,15)	0.6211(0.4201)	0.4784(0.0905)	0.3127(0.0623)	0.2014(0.2259)
(35,30)	(28,25)	0.5449(0.1175)	0.5763(0.1349)	0.1255(0.3826)	0.3157(0.0673)

从表1可以看出，经验Bayes估计的MSE比极大似然估计的MSE小，并且样本容量越小，截尾程度越高，效果越明显。从表2和表3可以看出，考虑环境因子的参数估计和可靠性指标估计要优于没有考虑环境因子时的参数估计和可靠性指标估计。

6 结论

在可靠性评定中，环境因子作为一种扩大样本量的途径，对提高产品的可靠性评估结果有重要的意义。本文利用经验Bayes法，给出了Rayleigh分布环境因子的经验Bayes估计，通过理论分析和模拟结果比较，得出了Rayleigh分布环境因子的经验Bayes估计优于极大似然估计。现有的环境因子的估计方法，如极大似然估计等，是在大样本理论的基础上提出的。而本文提出的经验Bayes法可用于小样本试验的统计分析，并且可充分利用现场试验数据，因此本文提出的方法更符合工程实际。

参考文献:

[1] Ahmed A, Soliman, Fahad M, *et al*. Bayesian inference using record values from Rayleigh model with application[J]. European Journal of Operational Research, 2008, 185: 659-672

[2] Jari Salo, Hassan M, E1-Sallabi, *et al*. The distribution of the product of independent Rayleigh random variables[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2006, 54(2): 639-643

[3] Arturo J, Fernandez. Bayesian inference from type II doubly censored Rayleigh data[J]. Statistics and Probability Letters, 2000, 48: 393-399

[4] 林金官，王海斌，刘应安等. 基于II型截尾样本下Rayleigh分布参数的条件置信限[J]. 东南大学学报，2001, 31(2): 117-122

Lin J G, Wang H B, Liu Y A, *et al*. Conditional confidence intervals of the parameters for two-parameter Rayleigh distribution based on type-II censored samples[J]. Journal of Southeast University, 2001, 31(2): 117-122

[5] Zhang C G. Energy decay estimates of the Rayleigh beam with a pointwise feedback[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(6): 1109-1116
[6] 杨一都. 用有限元亏量校正求特征值下界[J]. 工程数学学报，2006, 23(1): 99-106
Yang Y D. A finite element defect correction scheme and lower bounds for the eigenvalue[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2006, 23(1): 99-106
[7] 胡斌. 环境因子的定义及研究现状[J]. 信息与电子工程，2003, (1): 88-92
Hu B. *The definition and research status of environmental factor*[J]. *Information and Electronic Engineering*, 2003, (1): 88-92
[8] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：高等教育出版社，2006
Cao J H, Cheng K. Introduction of Reliability Mathematics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2006
[9] Bernardo J M, Smith A F M. Bayesian Theory[M]. New York: Wiley, 1994
[10] 茆诗松. 贝叶斯统计[M]. 北京：中国统计出版社，1999
Mao S S. Bayesian Statistics[M]. Beijing: China Statistics Press, 1999

Empirical Bayes Estimation and Application for the Environmental Factor of Two-parameter Rayleigh Distribution

HU Jun-mei, SHI Yi-min, GAO Ni, QIN Xiao-qiong

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: When the location parameter is known, we discuss the maximum likelihood estimation (MLE) and empirical Bayes estimation (EBE) of environmental factor under a two-parameter Rayleigh distribution. Furthermore, we estimate the reliability performance by using the estimation of environmental factor. Finally, based on the Monte-Carlo simulation, the simulating results show that the accuracy of the EBE is better than that of the MLE and that the reliability assessment is better by considering the environmental factor.

Keywords: Rayleigh distribution; environmental factor; empirical Bayes estimation; reliability assessment

Received: 12 May 2008. **Accepted:** 29 Feb 2009.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (70471057).